

APPLI CORRIGEE : « Une double somme est égale au produit des sommes des modalités ligne et colonne » d'un tableau croisé – J'apprends à construire mon tableau -

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Soit le tableau des tables de multiplication

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Le tableau est composé de 9 Colonnes et 9 lignes.

On dit qu'il est de rang 9. Ce que l'on écrit :

$n = 9$ (c'est-à-dire 9 sur 9)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

On réalise les produits ligne colonne

Soit au total 81 produits = 9×9

Ou $(n.n) = n^2$ produits = 9^2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Il existe des produits en diagonal ou appareillés

Soit $n = 9$ produits en diagonal

ligne fois colonne ou colonne fois ligne

(1×1) ou $(1 \times 1) = 1$

$(2 \times 2) = (2 \times 2) = 4$

Etc...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Il existe des produits hors diagonale ou dépareillés et symétriquement égaux

$(3 \times 2) = (2 \times 3) = 6$

$(6 \times 3) = (3 \times 6) = 18$

$(9 \times 5) = (5 \times 9) = 45$ etc.....

Leur nombre est :

Soit n^2 au total

Soit n en diagonale

donc hors diagonale

$n^2 - n = n(n-1) = 9(9-1) = 72$ produits

TRADUCTION ALGEBRIQUE (construction d'un tableau algébrique)

Choix des indices

i lignes : $i = 1$ à 9

j colonnes : $j = 1$ à 9

choix des variables

lignes $x_i = x_1$ à x_9

colonnes $y_j = y_1$ à y_9

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
x_1									
x_2									
x_3									
x_4									
x_5									
x_6									
x_7									
x_8									
x_9									

Réalisation des produits (x_i, y_j)

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
x_1	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_3$	$x_1 \cdot y_4$	$x_1 \cdot y_5$	$x_1 \cdot y_6$	$x_1 \cdot y_7$	$x_1 \cdot y_8$	$x_1 \cdot y_9$
x_2	$x_2 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_3$	$x_2 \cdot y_4$	$x_2 \cdot y_5$	$x_2 \cdot y_6$	$x_2 \cdot y_7$	$x_2 \cdot y_8$	$x_2 \cdot y_9$
x_3	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_3$	$x_3 \cdot y_4$	$x_3 \cdot y_5$	$x_3 \cdot y_6$	$x_3 \cdot y_7$	$x_3 \cdot y_8$	$x_3 \cdot y_9$
x_4	$x_4 \cdot y_1$	$x_4 \cdot y_2$	$x_4 \cdot y_3$	$x_4 \cdot y_4$	$x_4 \cdot y_5$	$x_4 \cdot y_6$	$x_4 \cdot y_7$	$x_4 \cdot y_8$	$x_4 \cdot y_9$
x_5	$x_5 \cdot y_1$	$x_5 \cdot y_2$	$x_5 \cdot y_3$	$x_5 \cdot y_4$	$x_5 \cdot y_5$	$x_5 \cdot y_6$	$x_5 \cdot y_7$	$x_5 \cdot y_8$	$x_5 \cdot y_9$
x_6	$x_6 \cdot y_1$	$x_6 \cdot y_2$	$x_6 \cdot y_3$	$x_6 \cdot y_4$	$x_6 \cdot y_5$	$x_6 \cdot y_6$	$x_6 \cdot y_7$	$x_6 \cdot y_8$	$x_6 \cdot y_9$
x_7	$x_7 \cdot y_1$	$x_7 \cdot y_2$	$x_7 \cdot y_3$	$x_7 \cdot y_4$	$x_7 \cdot y_5$	$x_7 \cdot y_6$	$x_7 \cdot y_7$	$x_7 \cdot y_8$	$x_7 \cdot y_9$
x_8	$x_8 \cdot y_1$	$x_8 \cdot y_2$	$x_8 \cdot y_3$	$x_8 \cdot y_4$	$x_8 \cdot y_5$	$x_8 \cdot y_6$	$x_8 \cdot y_7$	$x_8 \cdot y_8$	$x_8 \cdot y_9$
x_9	$x_9 \cdot y_1$	$x_9 \cdot y_2$	$x_9 \cdot y_3$	$x_9 \cdot y_4$	$x_9 \cdot y_5$	$x_9 \cdot y_6$	$x_9 \cdot y_7$	$x_9 \cdot y_8$	$x_9 \cdot y_9$

$n(n-1)$ produits hors diagonale ou dépareillés et symétriquement égaux

$$x_3 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_3$$

$$x_6 \cdot y_3 = x_3 \cdot y_6$$

$$x_9 \cdot y_5 = x_5 \cdot y_9 \text{ etc...}$$

$$n(n-1) = 9(9-1) = 72 \text{ produits}$$

$n = 9$ produits en diagonale appareillés

$$(x_1 \cdot y_1) (x_2 \cdot y_2) \dots (x_9 \cdot y_9)$$

$$\text{Soit au total : } n(n-1) + n = n^2 - n + n = n^2 = 9^2 = 81$$

Réalisation des Sommes Lignes (SL) et Colonnes (SC)

Il est possible de remplir le tableau en opérant en lignes (ou selon les lignes, donc suivant i), ou bien en opérant en colonnes (ou selon les colonnes, donc suivant j).

Selon les lignes (ou suivant i)

Exemple de la première ligne : calcul de SL_1 appliqué aux Tables

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SL
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
SC										

$$(1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4)+(1.5)+(1.6)+(1.7)+(1.8)+(1.9) = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$$

En mettant 1 en facteur

$$1(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 1(45) = 45$$

L'opération est identique pour toutes les lignes jusqu'à SL_9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SL
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	90
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	135
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	180
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	225
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	270
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	315
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	360
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	405
SC										

Traduction algébrique de SL1

$\begin{matrix} \backslash & y_j \\ x_i \end{matrix}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	SL
x_1	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_3$	$x_1 \cdot y_4$	$x_1 \cdot y_5$	$x_1 \cdot y_6$	$x_1 \cdot y_7$	$x_1 \cdot y_8$	$x_1 \cdot y_9$	$x_1 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_2										
x_3										
x_4										
x_5										
x_6										
x_7										
x_8										
x_9										
SC										

$x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_1 y_4 + x_1 y_5 + x_1 y_6 + x_1 y_7 + x_1 y_8 + x_1 y_9 =$ en mettant x_1 en facteur

$$x_1 (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) = x_1 \sum_{j=1}^9 y_j$$

L'opération est identique pour toutes les lignes jusqu'à SL_9 .

$\begin{matrix} \backslash & y_j \\ x_i \end{matrix}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	SL
x_1	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_3$	$x_1 \cdot y_4$	$x_1 \cdot y_5$	$x_1 \cdot y_6$	$x_1 \cdot y_7$	$x_1 \cdot y_8$	$x_1 \cdot y_9$	$x_1 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_2	$x_2 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_3$	$x_2 \cdot y_4$	$x_2 \cdot y_5$	$x_2 \cdot y_6$	$x_2 \cdot y_7$	$x_2 \cdot y_8$	$x_2 \cdot y_9$	$x_2 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_3	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_3$	$x_3 \cdot y_4$	$x_3 \cdot y_5$	$x_3 \cdot y_6$	$x_3 \cdot y_7$	$x_3 \cdot y_8$	$x_3 \cdot y_9$	$x_3 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_4	$x_4 \cdot y_1$	$x_4 \cdot y_2$	$x_4 \cdot y_3$	$x_4 \cdot y_4$	$x_4 \cdot y_5$	$x_4 \cdot y_6$	$x_4 \cdot y_7$	$x_4 \cdot y_8$	$x_4 \cdot y_9$	$x_4 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_5	$x_5 \cdot y_1$	$x_5 \cdot y_2$	$x_5 \cdot y_3$	$x_5 \cdot y_4$	$x_5 \cdot y_5$	$x_5 \cdot y_6$	$x_5 \cdot y_7$	$x_5 \cdot y_8$	$x_5 \cdot y_9$	$x_5 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_6	$x_6 \cdot y_1$	$x_6 \cdot y_2$	$x_6 \cdot y_3$	$x_6 \cdot y_4$	$x_6 \cdot y_5$	$x_6 \cdot y_6$	$x_6 \cdot y_7$	$x_6 \cdot y_8$	$x_6 \cdot y_9$	$x_6 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_7	$x_7 \cdot y_1$	$x_7 \cdot y_2$	$x_7 \cdot y_3$	$x_7 \cdot y_4$	$x_7 \cdot y_5$	$x_7 \cdot y_6$	$x_7 \cdot y_7$	$x_7 \cdot y_8$	$x_7 \cdot y_9$	$x_7 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_8	$x_8 \cdot y_1$	$x_8 \cdot y_2$	$x_8 \cdot y_3$	$x_8 \cdot y_4$	$x_8 \cdot y_5$	$x_8 \cdot y_6$	$x_8 \cdot y_7$	$x_8 \cdot y_8$	$x_8 \cdot y_9$	$x_8 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_9	$x_9 \cdot y_1$	$x_9 \cdot y_2$	$x_9 \cdot y_3$	$x_9 \cdot y_4$	$x_9 \cdot y_5$	$x_9 \cdot y_6$	$x_9 \cdot y_7$	$x_9 \cdot y_8$	$x_9 \cdot y_9$	$x_9 \sum_{j=1}^9 y_j$
SC										

Selon les colonnes (ou suivant j)

Exemple de la première colonne (SC1) (tableau des Tables)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SL
1	1									
2	2									
3	3									
4	4									
5	5									
6	6									
7	7									
8	8									
9	9									
SC	45									

$$(1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4)+(1.5)+(1.6)+(1.7)+(1.8)+(1.9) = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$$

En mettant 1 en facteur

$$1(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 1(45) = 45$$

L'opération est identique pour toutes les colonnes jusqu'à SC9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81
SC	45	90	135	180	225	270	315	360	405

Traduction algébrique de SC1

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	SL
x_1	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_3$	$x_1 \cdot y_4$	$x_1 \cdot y_5$	$x_1 \cdot y_6$	$x_1 \cdot y_7$	$x_1 \cdot y_8$	$x_1 \cdot y_9$	
x_2	$x_2 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_3$	$x_2 \cdot y_4$	$x_2 \cdot y_5$	$x_2 \cdot y_6$	$x_2 \cdot y_7$	$x_2 \cdot y_8$	$x_2 \cdot y_9$	
x_3	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_3$	$x_3 \cdot y_4$	$x_3 \cdot y_5$	$x_3 \cdot y_6$	$x_3 \cdot y_7$	$x_3 \cdot y_8$	$x_3 \cdot y_9$	
x_4	$x_4 \cdot y_1$	$x_4 \cdot y_2$	$x_4 \cdot y_3$	$x_4 \cdot y_4$	$x_4 \cdot y_5$	$x_4 \cdot y_6$	$x_4 \cdot y_7$	$x_4 \cdot y_8$	$x_4 \cdot y_9$	
x_5	$x_5 \cdot y_1$	$x_5 \cdot y_2$	$x_5 \cdot y_3$	$x_5 \cdot y_4$	$x_5 \cdot y_5$	$x_5 \cdot y_6$	$x_5 \cdot y_7$	$x_5 \cdot y_8$	$x_5 \cdot y_9$	
x_6	$x_6 \cdot y_1$	$x_6 \cdot y_2$	$x_6 \cdot y_3$	$x_6 \cdot y_4$	$x_6 \cdot y_5$	$x_6 \cdot y_6$	$x_6 \cdot y_7$	$x_6 \cdot y_8$	$x_6 \cdot y_9$	
x_7	$x_7 \cdot y_1$	$x_7 \cdot y_2$	$x_7 \cdot y_3$	$x_7 \cdot y_4$	$x_7 \cdot y_5$	$x_7 \cdot y_6$	$x_7 \cdot y_7$	$x_7 \cdot y_8$	$x_7 \cdot y_9$	
x_8	$x_8 \cdot y_1$	$x_8 \cdot y_2$	$x_8 \cdot y_3$	$x_8 \cdot y_4$	$x_8 \cdot y_5$	$x_8 \cdot y_6$	$x_8 \cdot y_7$	$x_8 \cdot y_8$	$x_8 \cdot y_9$	
x_9	$x_9 \cdot y_1$	$x_9 \cdot y_2$	$x_9 \cdot y_3$	$x_9 \cdot y_4$	$x_9 \cdot y_5$	$x_9 \cdot y_6$	$x_9 \cdot y_7$	$x_9 \cdot y_8$	$x_9 \cdot y_9$	
SC	$y_1 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_2 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_3 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_4 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_5 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_6 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_7 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_8 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_9 \sum_{j=1}^9 x_i$	

$y_1 x_1 + y_1 x_2 + y_1 x_3 + y_1 x_4 + y_1 x_5 + y_1 x_6 + y_1 x_7 + y_1 x_8 + y_1 x_9 =$ en mettant x_1 en facteur

$$y_1 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = y_1 \sum_{j=1}^9 x_i$$

L'opération est identique pour toutes les colonnes jusqu'à SC_9 .

Ensemble du tableau algébrique

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	SL
x_1	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_3$	$x_1 \cdot y_4$	$x_1 \cdot y_5$	$x_1 \cdot y_6$	$x_1 \cdot y_7$	$x_1 \cdot y_8$	$x_1 \cdot y_9$	$x_1 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_2	$x_2 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_3$	$x_2 \cdot y_4$	$x_2 \cdot y_5$	$x_2 \cdot y_6$	$x_2 \cdot y_7$	$x_2 \cdot y_8$	$x_2 \cdot y_9$	$x_2 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_3	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_3$	$x_3 \cdot y_4$	$x_3 \cdot y_5$	$x_3 \cdot y_6$	$x_3 \cdot y_7$	$x_3 \cdot y_8$	$x_3 \cdot y_9$	$x_3 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_4	$x_4 \cdot y_1$	$x_4 \cdot y_2$	$x_4 \cdot y_3$	$x_4 \cdot y_4$	$x_4 \cdot y_5$	$x_4 \cdot y_6$	$x_4 \cdot y_7$	$x_4 \cdot y_8$	$x_4 \cdot y_9$	$x_4 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_5	$x_5 \cdot y_1$	$x_5 \cdot y_2$	$x_5 \cdot y_3$	$x_5 \cdot y_4$	$x_5 \cdot y_5$	$x_5 \cdot y_6$	$x_5 \cdot y_7$	$x_5 \cdot y_8$	$x_5 \cdot y_9$	$x_5 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_6	$x_6 \cdot y_1$	$x_6 \cdot y_2$	$x_6 \cdot y_3$	$x_6 \cdot y_4$	$x_6 \cdot y_5$	$x_6 \cdot y_6$	$x_6 \cdot y_7$	$x_6 \cdot y_8$	$x_6 \cdot y_9$	$x_6 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_7	$x_7 \cdot y_1$	$x_7 \cdot y_2$	$x_7 \cdot y_3$	$x_7 \cdot y_4$	$x_7 \cdot y_5$	$x_7 \cdot y_6$	$x_7 \cdot y_7$	$x_7 \cdot y_8$	$x_7 \cdot y_9$	$x_7 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_8	$x_8 \cdot y_1$	$x_8 \cdot y_2$	$x_8 \cdot y_3$	$x_8 \cdot y_4$	$x_8 \cdot y_5$	$x_8 \cdot y_6$	$x_8 \cdot y_7$	$x_8 \cdot y_8$	$x_8 \cdot y_9$	$x_8 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_9	$x_9 \cdot y_1$	$x_9 \cdot y_2$	$x_9 \cdot y_3$	$x_9 \cdot y_4$	$x_9 \cdot y_5$	$x_9 \cdot y_6$	$x_9 \cdot y_7$	$x_9 \cdot y_8$	$x_9 \cdot y_9$	$x_9 \sum_{j=1}^9 y_j$
SC	$y_1 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_2 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_3 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_4 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_5 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_6 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_7 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_8 \sum_{j=1}^9 x_i$	$y_9 \sum_{j=1}^9 x_i$	

Il est alors possible de calculer la somme totale du tableau (en rouge)

D'abord celle des tables

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SL
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	90
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	135
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	180
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	225
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	270
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	315
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	360
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	405
SC	45	90	135	180	225	270	315	360	405	2025

On se rend compte qu'il est indifférent d'obtenir 2025, en SL ou en SC. Numériquement on calcule :

$$45+90+135+180+225+270+315+360+405 = 2025.$$

Il en est de même dans le tableau algébrique. Mais, du fait de l'algèbre, il est nécessaire d'écrire la somme totale de deux manières : en SL puis en SC

Somme total du tableau en ligne (SL)

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	SL
x_i										
x_1	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_3$	$x_1 \cdot y_4$	$x_1 \cdot y_5$	$x_1 \cdot y_6$	$x_1 \cdot y_7$	$x_1 \cdot y_8$	$x_1 \cdot y_9$	$x_1 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_2	$x_2 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_3$	$x_2 \cdot y_4$	$x_2 \cdot y_5$	$x_2 \cdot y_6$	$x_2 \cdot y_7$	$x_2 \cdot y_8$	$x_2 \cdot y_9$	$x_2 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_3	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_3$	$x_3 \cdot y_4$	$x_3 \cdot y_5$	$x_3 \cdot y_6$	$x_3 \cdot y_7$	$x_3 \cdot y_8$	$x_3 \cdot y_9$	$x_3 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_4	$x_4 \cdot y_1$	$x_4 \cdot y_2$	$x_4 \cdot y_3$	$x_4 \cdot y_4$	$x_4 \cdot y_5$	$x_4 \cdot y_6$	$x_4 \cdot y_7$	$x_4 \cdot y_8$	$x_4 \cdot y_9$	$x_4 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_5	$x_5 \cdot y_1$	$x_5 \cdot y_2$	$x_5 \cdot y_3$	$x_5 \cdot y_4$	$x_5 \cdot y_5$	$x_5 \cdot y_6$	$x_5 \cdot y_7$	$x_5 \cdot y_8$	$x_5 \cdot y_9$	$x_5 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_6	$x_6 \cdot y_1$	$x_6 \cdot y_2$	$x_6 \cdot y_3$	$x_6 \cdot y_4$	$x_6 \cdot y_5$	$x_6 \cdot y_6$	$x_6 \cdot y_7$	$x_6 \cdot y_8$	$x_6 \cdot y_9$	$x_6 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_7	$x_7 \cdot y_1$	$x_7 \cdot y_2$	$x_7 \cdot y_3$	$x_7 \cdot y_4$	$x_7 \cdot y_5$	$x_7 \cdot y_6$	$x_7 \cdot y_7$	$x_7 \cdot y_8$	$x_7 \cdot y_9$	$x_7 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_8	$x_8 \cdot y_1$	$x_8 \cdot y_2$	$x_8 \cdot y_3$	$x_8 \cdot y_4$	$x_8 \cdot y_5$	$x_8 \cdot y_6$	$x_8 \cdot y_7$	$x_8 \cdot y_8$	$x_8 \cdot y_9$	$x_8 \sum_{j=1}^9 y_j$
x_9	$x_9 \cdot y_1$	$x_9 \cdot y_2$	$x_9 \cdot y_3$	$x_9 \cdot y_4$	$x_9 \cdot y_5$	$x_9 \cdot y_6$	$x_9 \cdot y_7$	$x_9 \cdot y_8$	$x_9 \cdot y_9$	$x_9 \sum_{j=1}^9 y_j$
SC										

L'addition des lignes

$$x_1 \sum_{j=1}^9 y_j + x_2 \sum_{j=1}^9 y_j + x_3 \sum_{j=1}^9 y_j + x_4 \sum_{j=1}^9 y_j + x_5 \sum_{j=1}^9 y_j + x_6 \sum_{j=1}^9 y_j + x_7 \sum_{j=1}^9 y_j + x_8 \sum_{j=1}^9 y_j + x_9 \sum_{j=1}^9 y_j$$

On constate que le terme $\sum_{j=1}^9 y_j$ peut être mis en facteur

$$\sum_{j=1}^9 y_j (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9)$$

En sortant la parenthèse (qui est une constante) du sigma, :

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) \sum_{j=1}^9 y_j$$

L'addition entre parenthèse n'est autre que la somme des x_i de 1 à 9

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = \sum_{i=1}^9 x_i$$

Le total en rouge peut donc s'écrire : $\sum_{i=1}^9 x_i \sum_{j=1}^9 y_j$. Il s'interprète comme une double somme, ici suivant i , ou suivant les lignes.

La diction en est : « Double somme suivant i des $(x_i \cdot y_j)$ »

Somme totale du tableau en colonnes (SC)

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	SL
x_1										
x_2										
x_3										
x_4										
x_5										
x_6										
x_7										
x_8										
x_9										
SC	$y_1 \sum_{i=1}^9 x_i$	$y_2 \sum_{i=1}^9 x_i$	$y_3 \sum_{i=1}^9 x_i$	$y_4 \sum_{i=1}^9 x_i$	$y_5 \sum_{i=1}^9 x_i$	$y_6 \sum_{i=1}^9 x_i$	$y_7 \sum_{i=1}^9 x_i$	$y_8 \sum_{i=1}^9 x_i$	$y_9 \sum_{i=1}^9 x_i$	

L'addition des colonnes

$$y_1 \sum_{i=1}^9 x_i + y_2 \sum_{i=1}^9 x_i + y_3 \sum_{i=1}^9 x_i + y_4 \sum_{i=1}^9 x_i + y_5 \sum_{i=1}^9 x_i + y_6 \sum_{i=1}^9 x_i + y_7 \sum_{i=1}^9 x_i + y_8 \sum_{i=1}^9 x_i + y_9 \sum_{i=1}^9 x_i$$

On constate que le terme $\sum_{j=1}^9 x_i$ peut être mis en facteur

$$\sum_{i=1}^9 x_i (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9)$$

L'addition entre parenthèse n'est autre que la somme des y_j de 1 à 9

$$(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) = \sum_{j=1}^9 y_j$$

Le total en rouge peut donc s'écrire : $\sum_{j=1}^9 y_j \sum_{i=1}^9 x_i$. Il s'interprète comme une double somme, ici suivant j , ou suivant les colonnes.

La diction en est : « Double somme suivant j des $(y_j \times x_i)$ »

On obtient ainsi les deux premières formules de la double somme (ou double sigma):

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 x_i y_j \text{ double somme suivant } i$$

$$\sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^9 y_j x_i \text{ double somme suivant } j$$

Dans chaque cas, on a en effet effectué une double somme : celle préparatrice aux lignes (SL), puis addition des sommes lignes. De même pour les colonnes (SC).

Les deux formules suivantes sont celles qui permettent d'énoncer la règle de la double somme :

La double somme est le produit des sommes des modalités ligne et colonnes.

Illustration de la règle par les tables

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Les modalités lignes sont (en grisé) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 En les additionnant $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ Les modalités colonnes sont (en jaune) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 En les additionnant $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ En effectuant leur produit : $45 \times 45 = 2025$
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Il en est de même algébriquement :

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_i										
x_1										
x_2										
x_3										
x_4										
x_5										
x_6										
x_7										
x_8										
x_9										

Les modalités lignes sont (en grisé)

$$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9$$

En les additionnant

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = \sum_{i=1}^9 x_i$$

Les modalités colonnes sont (en jaune)

$$y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8 \ y_9$$

En les additionnant

$$(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) = \sum_{i=1}^9 y_j$$

En effectuant leur produit on vérifie la règle énoncée, celle de la double somme :

$$\sum_{i=1}^9 x_i \sum_{j=1}^9 y_j \quad \text{suivant les lignes}$$

$$\sum_{j=1}^9 y_j \sum_{i=1}^9 x_i \quad \text{suivant les colonnes}$$

Dans chaque cas, on a en effet effectué une double somme : celle des modalités lignes (les x_i), puis celle des modalités colonnes (les y_j). Ou inversement.

RESUME DES 4 FORMULES DE LA DOUBLE SOMME

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 x_i y_j \quad \text{double somme suivant } i$$

$$\sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^9 y_j x_i \quad \text{double somme suivant } j$$

$$\sum_{i=1}^9 x_i \sum_{j=1}^9 y_j \quad \text{suivant les lignes}$$

$$\sum_{j=1}^9 y_j \sum_{i=1}^9 x_i \quad \text{suivant les colonnes}$$

Le résultat dépend uniquement des modalités (i) et (j) choisies, et de leur nombre, car :

La double somme est le produit des sommes des modalités ligne et colonnes

FIN DU DOCUMENT